1. Valores esperados condicionales

<u>Definición</u>: Si Y_1 y Y_2 son cualesquiera dos variables aleatorias, el valor esperado condicional de $g(Y_1)$, dado que $Y_2 = y_2$, se define como

$$E(g(Y_1)|Y_2 = y_2) = \int_{-\infty}^{\infty} g(y_1) f(y_1|y_2) dy_1$$

si Y_1 y Y_2 son conjuntamente continuas y

$$E(g(Y_1|Y_2 = y_2) = \sum_{y_1} g(y_1) p(y_1|y_2)$$

si Y_1 y Y_2 son conjuntamente discretas.

<u>Teorema</u>: Si Y_1 y Y_2 son dos variables aleatorias, entonces

$$E(Y_1) = E[E(Y_1|Y_2)]$$

donde, en el miembro derecho de la ecuación, el valor esperado de adentro es con respecto a la distribución condicional de Y_1 dada Y_2, y el valor esperado de afuera es con respecto a la distribución de Y_2.

<u>Teorema</u>: Si Y_1 y Y_2 representan variables aleatorias, entonces

$$V(Y_1) = E[V(Y_1|Y_2)] + V[E(Y_1|Y_2)].$$

<u>Ejemplo</u>. Para la misma función de densidad, calcule $E(Y_1|Y_2 = y_2)$ y use este resultado para calcular $E(Y_1)$.

<u>Solución</u>.
Para calcular el valor esperado condicional necesitaremos la densidad condicional de Y_1 dado Y_2. Recordemos que

$$f(y_1|y_2) = \frac{f(y_1, y_2)}{f_2(y_2)}$$

y

$$f_2(y_2) = \int_0^{y_2} 6(1 - y_2) dy_1 = 6(1 - y_2)y_2.$$

$$f(y_1|y_2) = \frac{6(1 - y_2)}{6(1 - y_2)y_2} = \frac{1}{y_2}.$$

para $0 < y_2 \leq 1$.

$$E(Y_1|Y_2 = y_2) = \int_0^{y_2} y_1 \frac{1}{y_2} dy_1 = \frac{1}{y_2} \frac{y_2^2}{2} = \frac{y_2}{2}.$$

Por otro lado si queremos calcular entonces $E(Y_1)$ tenemos que

$$E(Y_1) = E[E(Y_1|Y_2)] = \int_0^1 \left[\int_0^{y_2} y_1 \frac{1}{y_2} dy_1 \right] dy_2 = \int_0^1 \frac{y_2}{2} dy_2 = \frac{1}{4}.$$

Que es consistente con lo obtenido anteriormente.

<u>Ejemplo</u>. Se tiene una empresa que realiza diariamente 100 productos que deben cumplir con cierto requerimiento. X es la cantidad de productos que cumplen con el requerimiento. La probabilidad de que un producto cumpla con el requerimiento dado es otra variable aleatoria que se distribuye beta$(2, 3)$. Halle la media y varianza de X.

<u>Solución</u>.
Es claro que $X \sim Bin(100, p)$ y a su vez $p \sim beta(2, 3)$, entonces debemos utilizar las esperanzas y varianzas anidadas para calcular lo que nos piden, luego:

$$E[X] = E[E[X|p]]$$

Es claro que $E[X|p] = np$ ya que X es binomial.

$$E[X] = E[E[X|p]] = E[np] = nE[p] = n\frac{\alpha}{\alpha + \beta} = \frac{200}{5} = 40.$$

Por otro lado para calcular la varianza usamos que

$$V(X) = E[V(X|p)] + V(E[X|p]) = E[np(1-p)] + V(np) = n \left[E[p] - E[p^2] + V(p) \right]$$

Ahora para calcular $E[p^2]$ usamos que $p \sim beta$ y que $V(p) = E[p^2] - E[p]^2$, luego

$$\begin{aligned} E[p^2] = V(p) - E[p]^2 &= \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2 (\alpha+\beta+1)} - \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta} \right)^2 \\ &= \frac{1}{25} - \frac{4}{25} = -\frac{3}{25}. \end{aligned}$$

Entonces

$$V(X) = 100 \left(\frac{2}{5} + \frac{3}{25} + \frac{1}{25} \right) = \frac{1400}{25} = 56.$$